1 Strani fenomeni

Consideriamo la funzione f definita come segue

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad\qquad f(x,y) = (y, 1 + x - y^2)$$

Definiamo $f_{(n)}(x,y) = f(x,y)$ nel seguente modo:

$$f_{(1)}(x,y) = f(x,y)$$

$$f_{(2)}(x,y) = f(f(x,y))$$
$$f_{(3)}(x,y) = f(f(f(x,y)))$$
$$\ldots$$

Consideriamo ora il rettangolo $[-4,8] \times [-8,4]$ e un punto (x,y) qualsiasi al suo interno. Ci chiediamo se $f_{(10)}(x,y)$ sia ancora dentro al rettangolo e costruiamo un semplice programmino che risolva questo problema su un computer.
Dividiamo ora il rettangolo in un grande numero di punti, paragonabili ai pixel dello schermo che servono per disegnarlo, e ripetiamo questa operazione per tutti questi punti. Facciamoci quindi disegnare sull schermo tutti i punti $f_{(10)}(x,y)$ al variare di (x,y) nel rettangolo considerato. Otteniamo così la figura 1, che chiameremo *attrattore*.

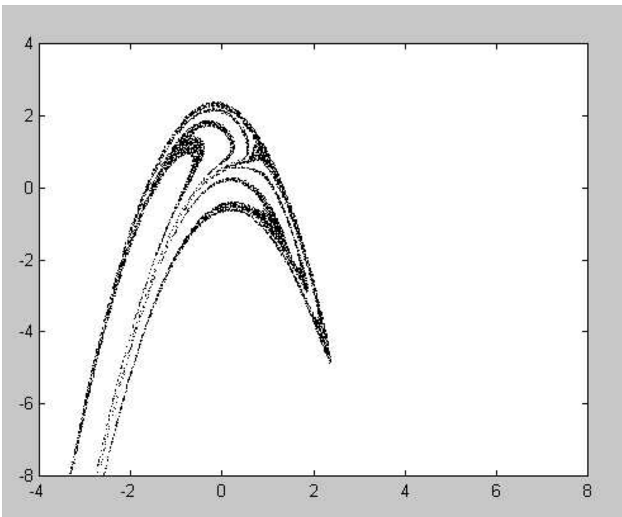


Figura 1: L'attrattore

Ci chiediamo ora se tutti i punti del rettangolo si siano evoluti nell'*attrattore* o se invece alcuni di essi, sotto l'azione di f, sono usciti fuori dal rettangolo. Facciamoci quindi disegnare dal computer tutti i punti (x, y) che evolvendo sono rimasti nel rettangolo (hanno cioè formato l'*attrattore*). Chiameremo questo insieme di punti il *bacino di attrazione*. Al contrario di ogni possibile aspettativa, scopriamo che hanno esattamente la stessa forma. Inoltre si trasformano l'uno nell'altro con una rotazione di 90 gradi intorno all'origine più una riflessione. Per avere un esempio dove le cose vanno in modo più normale, si pensi al caso $f(x, y) = (x, \frac{y}{2})$. In questo caso l'attrattore è la retta $y = 0$ e il bacino di attrazione è tutto il rettangolo.

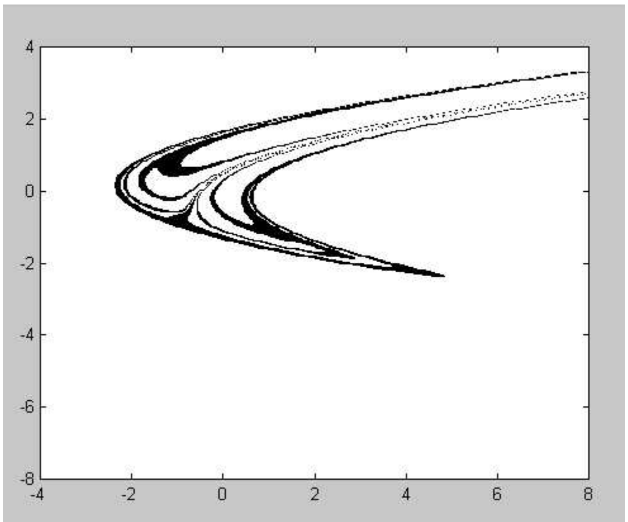
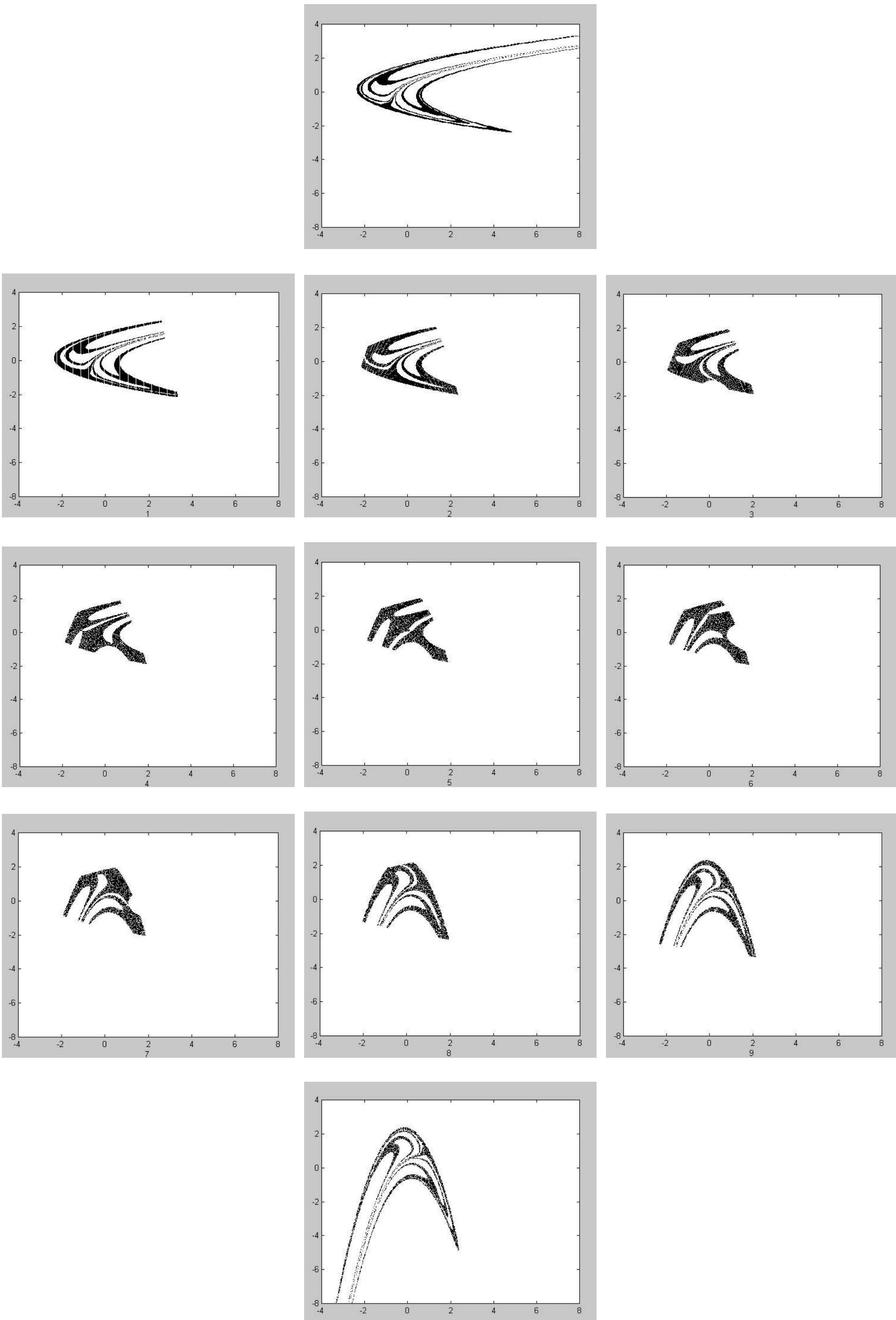


Figura 2: Il bacino di attrazione

Non sazi, ci chiediamo come il *bacino di attrazione* si trasformi, iterazione dopo iterazione, nell'*attrattore*. Sarebbe normale pensare ad una graduale rotazione che mantenga l'ordine interno dei punti. Invece il *bacino di attrazione* perde la sua forma già alla prima iterazione per riacquistarla solamente alla decima iterazione, quando cioè si è trasformato nell'attrattore.

Ecco in successione le 10 trasformazioni che portano il *bacino di attrazione* a trasformarsi nell'*attrattore*:



Sebbene la trasformazione sembri non avere una sua continuità interna ci si potrebbe comunque aspettare che tra il *bacino di attrazione* e l'*attrattore* venga rispettato l'ordine interno dei punti, cioè che per ogni coppia di punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ del rettangolo considerato valga

$$dist\Big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\Big) = dist\Big(f_{(10)}(x_1, y_1), f_{(10)}(x_2, y_2)\Big)$$

ma anche questo non è vero. Quello che succede è che tutti i punti del *bacino di attrazione* si mescolano tra loro andando ad occupare dopo 10 iterazioni un posto diverso all'interno della nuova figura (l'*attrattore*) sebbene la forma globale delle due figure sia identica. Per convincersi di questo è sufficiente guardare la seguente figura dove è mostrata l'evoluzione solo di una parte del *bacino di attrazione*. Come si può vedere, sebbene sia evoluta solo la "coda"

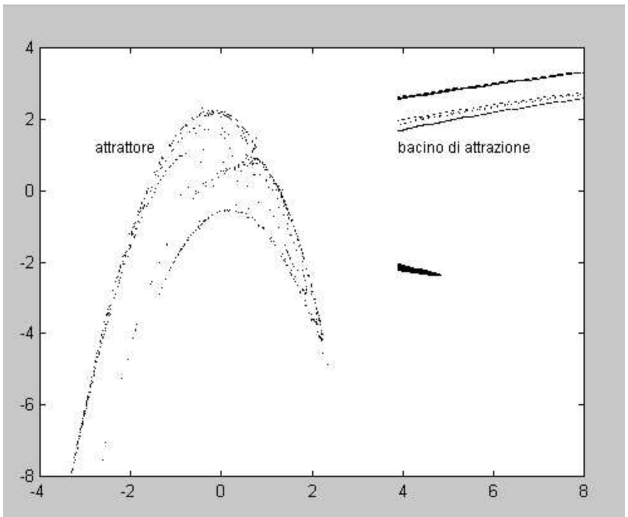


Figura 3: evoluzione di una parte del *bacino di attrazione*

del *bacino di attrazione*, l'*attrattore* è già completamente delineato.

Cosa succede se continuiamo a far evolvere il nostro *bacino di attrazione* oltre le 10 iterazioni? Scompare in breve tempo dal rettangolo. In pratica quindi, all'inizio si deforma, dopo esattamente 10 iterazioni riprende la sua forma iniziale e dopo scompare senza lasciare traccia, lasciando solo i punti $(-1, 1)$ e $(1, -1)$.